Утверждены
на заседании центральной предметно-методической комиссии
всероссийской олимпиады школьников по математике
(протокол № 2 от 25.06.2019 г.)

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного и муниципального этапов всероссийской олимпиады школьников в 2019/2020 учебном году по математике

Содержание

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного этапа

Введение

Настоящие требования к проведению школьного этапа всероссийской олимпиады школьников (далее – Олимпиада) по математике разработаны на основе Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников, утвержденного приказом Минобрнауки России от 18 ноября 2013 г. №1252 и изменениями, утвержденными приказами Минобрнауки России от 17 марта 2015 г. № 249 и от 17 декабря 2015 г. №1488 (далее – Порядок).

Настоящие методические рекомендации подготовлены центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь муниципальным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения школьного этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания школьного этапа, описание подходов к разработке заданий муниципальными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы олимпиадных заданий для проведения школьного этапа олимпиады с решениями. Данные задачи предлагались на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны или включены в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019/2020 учебном году утверждены на заседании центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 25 июня 2019 года).

Основные задачи

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является выявление и развитие у обучающихся творческих способностей и интереса к математике и научной (научно-исследовательской) деятельности, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования.

Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки, либо выполняет ее с не устраивающей учителя аккуратностью.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Школьный этап олимпиады проводится для учащихся **4-11 классов**.

Конкретные сроки и места проведения школьного этапа олимпиады по математике устанавливаются органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования. Олимпиада для учащихся всех школ муниципального образования проводится по единым заданиям, разработанным для каждой из параллелей 4-11 классов муниципальной предметно-методической комиссией, назначаемой органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования.

В олимпиаде имеет право принимать участие **каждый обучающийся** (далее – Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. При проведении олимпиады каждому участнику олимпиады должно быть предоставлено отдельное рабочее место, обеспечивающее **самостоятельное** выполнение заданий олимпиады каждым Участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности Участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 4-6 классов – 1-2 урока, для 7-8 классов – 2 урока, для 9-11 классов – 2-3 урока.

Участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для школьного этапа

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому ее участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.
4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.
5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки

условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.

6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в начальном и среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 4-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.
7. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование различных источников, неизвестных участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач.
8. В задания для учащихся 4-6 классов, впервые участвующих в олимпиадах, желательно включать задачи, не требующие сложных (многоступенчатых) математических рассуждений.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Перечень средств обучения и воспитания, используемых при проведении школьного этапа Олимпиады

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуются отдельные листы бумаги формата А4. Для черновиков выдаются отдельные листы. Записи на черновиках не учитываются при проверке выполненных олимпиадных заданий. Черновики сдаются вместе с выполненными заданиями. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Участникам во время проведения олимпиады в аудитории запрещено иметь при себе средства связи, электронно-вычислительную технику, фото-, аудио- и видеоаппаратуру, справочные материалы, письменные заметки и иные средства хранения и передачи информации.

Показ работ и проведение апелляций

Каждый участник олимпиады имеет право ознакомиться с результатами проверки своей работы. Рекомендуемое время проведения показа работ – на следующий учебный день после проведения олимпиады. Перед проведением показа работ жюри должно ознакомить участников олимпиады с решениями задач и критериями оценивания: в устной форме путем проведения разбора вариантов (отдельно для каждого класса), либо путем предоставления участникам решений заданий и критериев оценивания в печатном виде. При проведении показа работ члены жюри дают участнику олимпиады аргументированные пояснения по снижению баллов.

В случае несогласия участника олимпиады с выставленными баллами, он подает апелляцию. Процедура подачи апелляции определяется организатором школьного этапа олимпиады в соответствии с Порядком проведения всероссийской олимпиады школьников. Важно отметить, что баллы в работах могут быть изменены только после рассмотрения апелляции и принятия положительного решения по их изменению. При проведении показа работ баллы могут быть изменены только в случае установления технической ошибки по внесению баллов в протокол. При этом повышение баллов возможно только путем подачи участником олимпиады апелляции.

Тематика заданий школьного этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

IV-V КЛАССЫ

Натуральные числа и нуль.

Делители и кратные числа.

Деление с остатком.

Четность.

Текстовые задачи.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания, переливания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

Построение примеров и контрпримеров.

Разрезания.

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания школьного этапа олимпиады

Ниже приведены примеры типовых задач школьного этапа олимпиады с указанием примерной сложности для соответствующего класса. Задания разбиты по основным темам.

Арифметика, числовые ребусы

(4-5 класс, средняя). Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звездочками: ** + ** + **= 296.

Ответ. 99+99+98=296.

(4-6 класс, легкая). Найдите решение числового ребуса *AAA–AA–A=B*. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. 111–11–1=99.

(5-6 класс, средняя). Расставьте скобки в выражении 1 : 2 : 3 : 4 : 5 = 30 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. 1:(2:3:4:5)=30.

(7-8 класс, легкая). Расставьте скобки в левой части выражения 2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. (2:3):((4:5):6)=5.

(7-8 класс, сложная). Сколько решений имеет ребус $ABBB \times C + AC = CBAC$? Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. 8 решений.

Решение. Заметим, что цифры A и C – ненулевые. Вычтем из обоих частей равенства $\overline{AC}$. Получим $\overline{ABBB} \times C = \overline{CB00}$. Поскольку первая цифра числа $\overline{CB00}$ равна C, это возможно только в случае, когда $A = 1$. Получим $\overline{1BBB} \times C = \overline{C000} + \overline{BBB} \times C = \overline{CB00} = \overline{C000} + \overline{B00}$, откуда $\overline{BBB} \times C = \overline{B00}$. Это возможно только при $B = 0$. Итак, $A = 1$ и $B = 0$. Подставим эти значения в условие: $1000 \times C + \overline{1C} = \overline{C01C}$. Это равенство выполняется при любых C. Однако разным буквам соответствуют разные цифры, поэтому $C \neq 0$ и $C \neq 1$. Осталось 8 возможностей для C. Значит, ребус имеет 8 решений.

(8 класс, средняя). Число, состоящее из *N* цифр 8 (других цифр в числе нет), умножили на число 8. Полученное произведение имеет сумму цифр, равную 1200. Найдите *N*.

Ответ. 1191.

Решение. Перемножив числа в столбик, получим результат: 7111…11104. В этом числе *N*–2 единицы. А сумма его цифр равна $7 + (N-2) + 4 = 1200$, откуда *N*=1191.

(8 класс, средняя). Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 50 больше суммы его цифр.

Ответ. Например, 9811111.

Разрезания

(4-6 класс, средняя). Разрежьте угол 8×8 на уголки из трех клеток (см. рис. 1).

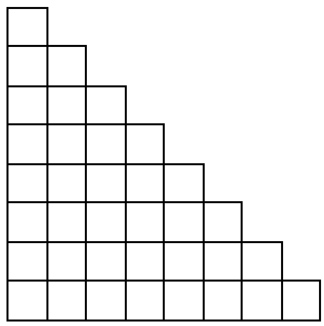


Рис. 1

Решение. Одно из возможных решений показано на рис. 2.

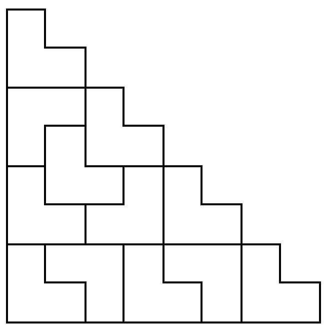


Рис. 2

(7-8 класс, средняя). Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из полученных четырех кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рис. 3.

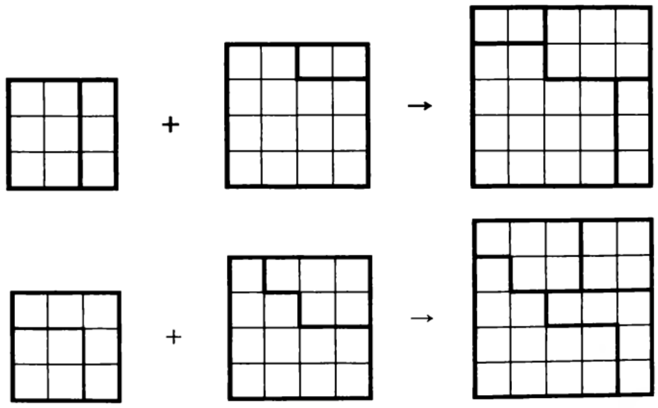


Рис. 3

Текстовые задачи

(4-5 класс, легкая). На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь 25 см^2. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а другая сторона на 2 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.

Ответ. 18 см^2.

(6-7 класс, средняя). Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у нее братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

Ответ. 5 детей (3 брата и 2 сестры).

Решение. Пусть сестер в семье x. Тогда из ответа Пети следует, что братьев в семье x+1. Теперь из ответа Маши получаем уравнение $x+1=3(x-1)$, откуда $x=2$.

(5-7 класс, средняя). У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишневого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть все варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-тоиз 5 + 8 + 10 = 23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.

(5-7 класс, средняя). В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Решение. При первом взвешивании в одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: 12=6+6. Получили искомое количество гвоздей: 19=13+6.

(5-7 класс, средняя). На прямой через равные промежутки поставили сто точек, и они заняли отрезок длины a. Затем на прямой через такие же промежутки поставили десять тысяч точек, и они заняли отрезок длины b. Во сколько раз b больше a?

Ответ. В 101 раз.

Решение. Обозначим длину промежутка за x. Сто точек делят отрезок длины a на 99 промежутков, а 10000 точек делят отрезок длины b на 9999 промежутков. Поэтому a=99x, b=9999x и b=101a.

(6-7 класс, средняя). К новогоднему празднику школа покупает каждому ученику по шоколадке. известно, что если покупать шоколад в упаковках по 20 шоколадок в каждой, то понадобится на 5 упаковок больше, чем упаковок по 24 шоколадки. Сколько учеников в школе?

Ответ. 600.

(7-8 класс, средняя). Три ученика A, B и C участвовали в беге на 100 м. Когда A прибежал на финиш, B был позади него на 10 м, также, когда B финишировал, C был позади него на 10 м. На сколько метров на финише A опередил C?

Ответ. На 19 метров.

Решение. Скорость B составляет 0,9 от скорости A, а скорость C составляет 0,9 от скорости B, т.е. 0,81 от скорости A.

(7-8 класс, средняя). Определите, чему равен угол между часовой и минутной стрелками часов в 23 часа 45 минут.

Ответ. 82,5°.

Решение. Угол между минутной стрелкой и «12» равен 90°, а между часовой и «12» равен четверти от угла между «11» и «12», т.е. равен $\frac{1}{4}\cdot\frac{360°}{12}=7{,}5°$.

(8-9 класс, средняя). Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к 17.00 проехал в 1,25 раза больший путь, чем к 16.00. Когда поезд выехал?

Ответ. В 12.00.

Решение. За 1 час от 16.00 до 17.00 поезд проехал 0,25 пути с момента выезда до 16.00. Значит, он ехал 4 часа и выехал в 12.00.

(7-8 класс, средняя). Два автомобиля, находящиеся на расстоянии S км друг от друга, движутся навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля v_1 км/ч, второго – v_2 км/ч. Через какое время они снова окажутся на расстоянии S км друг от друга?

Ответ. $\dfrac{2S}{v_1+v_2}$.

Решение. Автомобили встретятся через $\dfrac{S}{v_1+v_2}$ ч. Поэтому через такое же время после момента встречи расстояние между ними снова станет равно S.

(7-8 класс, средняя). В два киоска поступил товар по одинаковой цене. Через неделю в первом киоске все цены были снижены на 10%, а еще через неделю – подняты на 20%. Во втором киоске через две недели цены были увеличены на 10%. В каком киоске через две недели после поступления товара цены ниже?

Ответ. В первом киоске.

Решение. Если x – начальная цена товара, то его конечная цена в первом киоске – $x\cdot\dfrac{90}{100}\cdot\dfrac{120}{100}=1{,}08x$, а во втором – $x\cdot\dfrac{110}{100}=1{,}1x$.

(6-7 класс, сложная). У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше) чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 3 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 5 кг. Когда взвесили и арбуз, и дыню, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?

Ответ. 3 кг.

Решение. На сумму 3 + 5 = 8 кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 7 кг – только один раз. Поэтому сдвиг стрелки равен 8 – 7 = 1 кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше, чем показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.

(9-11 класс, средняя). По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположенных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

Ответ. 9 м/с и 8 м/с.

Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с ($x > y$). Тогда $10(x + y) = 170$ и $170(x - y) = 170$. Отсюда находим $x = 9$ м/с и $y = 8$ м/с.

Логические задачи

(6-7 класс, сложная). На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: "Мы все лжецы". Вася на это ему ответил: "Нет, только ты". Может ли Толя быть лжецом?

Ответ. Не может.

Решение. Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда бы сказал правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

(5-6 класс, средняя). К Васе пришли его одноклассники. Мать Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестренка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?

Ответ. 6.

Решение. Допустим, что гостей действительно больше шести. Тогда правы и Вася, и его сестра, а это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше шести, и Вася неправ. Но тогда должна быть права сестра, иначе снова нарушится условие задачи. Значит, гостей больше пяти. Но если их больше пяти и не больше шести, то их ровно шесть.

(6-7 класс, сложная). Одиннадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие – всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

Ответ. Не могли.

Рассмотрим двух шестиклассников, стоящих рядом. Про карточки, которые правый из них (П) получил от левого (Л), они дали разные ответы. Значит, один из них говорит правду, а другой – лжет. Пусть следующий по кругу за П – шестиклассник К. Тогда в паре П – К также один говорит правду, а другой – лжет. И так далее. Значит, говорящие правду и ложь – чередуются. Поэтому их должно быть четное количество.

(9-11 класс, средняя). В мешке лежат 26 синих и красных шаров. Среди любых 18 шаров есть хотя бы один синий, а среди любых 10 шаров есть хотя бы один красный. Сколько красных шаров в мешке?

Ответ. 17.

Решение. Так как из 18 шаров найдется хотя бы один синий, то красных не более 17, а из любых 10 шаров найдется хотя бы один красный, то есть синих не более 9. Так как всех шаров 26, то синих – 9, а красных – 17.

Четность

(7-8 класс, сложная). Вдоль забора растут 10 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 1000 ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на десяти кустах равно сумме пяти нечетных чисел, т.е. числу нечетному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 1000 ягод.

(6-7 класс, сложная). В 6Б классе обучаются 20 учеников. В первой четверти онипо трое дежурили по классу. Могло ли так получиться, что в некоторый момент каждый из учеников отдежурил с каждым ровно по одному разу?

Ответ: Не могло.

Решение. Предположим, что такое возможно. Рассмотрим любого ученика. В первое свое дежурство он отдежурил с двумя одноклассниками. Во второе – с двумя другими и т. д. Так как у него 19 одноклассников (нечетное число), то после девятого его дежурства останется ровно один одноклассник, с которым он не отдежурил. Полученное противоречие завершает доказательство.

(6-7 класс, сложная). Два натуральных числа в сумме дают 1001. Вася увеличил каждое из них на 25 и перемножил полученные числа. Он получил, что произведение также оканчивается на 1001. Докажите, что Вася ошибся.

Решение. Если сумма двух натуральных числе равна 1001, то одно из них четное, а другое нечетное. Если к четному числу прибавить 25, получится нечетное число. Аналогично, если к нечетному числу прибавить 25, получится четное число. А произведение четного и нечетного чисел должно быть числом четным и поэтому не может оканчиваться на 1001.

(6-7 класс, средняя). Сумма пяти чисел равна 200. Докажите, что их произведение не может оканчиваться на 1999.

Решение. Произведение чисел нечетно, следовательно, все пять чисел нечетны, и их сумма также должна быть нечетной.

(5-7 класс, сложная). В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 30, а Вася – 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

Ответ. Коля.

Решение. После каждого забега все присутствующие на уроке школьники получают нечётное количество конфет. Поэтому чётность количества полученных конфет у ребят, посетивших все уроки, должна быть одинаковой. Но из трёх чисел 29, 30, 33 первое и третье – нечётные, а второе – чётное. Значит, пропустил урок тот, у кого чётное количество заработанных конфет.

(8-9 класс, трудная). Грани игрального кубика занумерованы числами от 1 до 6. Петя сложил из восьми игральных кубиков куб вдвое большего размера так, что числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы. Может ли сумма всех 24 чисел, написанных на поверхности сложенного Петей куба, равняться 99?

Ответ. Не может.

Решение. Сумма всех чисел, записанных на гранях этих восьми игральных кубиков равна четному числу $(8 \cdot 21)$. Так как числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы, то они все числа внутри большого куба разбиваются на пары одинаковых. То есть сумма всех чисел внутри большого куба четна. Значит, и сумма всех чисел на поверхности большого куба также должна быть четной (как разность четных чисел) и не может равняться 99.

Делимость

(6-7 класс, легкая). Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

Ответ. Например, 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

(5-6 класс, средняя). Каждое из двух чисел не делится на 10. Их произведение равно 1000. А чему может равняться их сумма?

Ответ. 133=125+8.

(6-7 класс, легкая). Придумайте девятизначное число, у которого по крайней мере три разные цифры, и которое делится на каждую из них.

Ответ. Например, число 111111124 (делится на 1, на 2 и на 4).

(7-8 класс, сложная). В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок, в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

Ответ. 24 ученика.

Решение. Пусть в шахматный кружок ходит x ребят, тогда в него не ходит $2x$ ребят. Итак, всего в классе $3x$ ребят, и количество учеников в классе делится на 3. Аналогично, пусть в шашечный кружок ходит y ребят, тогда в него не ходит $3y$ ребят. Итак, всего в классе $4y$ ребят, и количество учеников в классе делится на 4.

Число учеников в классе делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное подходящее число, большее 20 и меньшее 30, это 24.

(9-10 класс, средняя). Докажите, что при любом натуральном n число n^3+3n^2+6n+8 является составным.

Решение. Утверждение задачи следует из разложения данного выражения на множители, каждый из которых больше единицы при всех натуральных n:

$$n^3+3n^2+6n+8=n^3+8+3n^2+6n=$$
$$=(n+2)(n^2-2n+4)+3n(n+2)=(n+2)(n^2+n+4).$$

(8-9 класс, сложная). Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2222. Докажите, что их сумма не может равняться 9999.

Решение. Если сумма трех целых чисел равна 9999, то либо они все нечетны (и тогда их произведение оканчивается на нечетную цифру), либо два из них четны, а одно нечетно (тогда их произведение делится на 4, а число, оканчивающееся на 22, на 4 не делится).

(8-10 класс, средняя). Сумма цифр натурального числа A равна сумме цифр числа $3A$.

а) Докажите, что А делится на 3.

б) Докажите, что А делится на 9.

в) Верно ли, что А обязательно делится на 27?

Ответ. в) Не обязательно.

Решение.

а), б) Пусть сумма цифр числа A равна S. Но так как $3A$ делится на 3, то S делится на 3, тогда и A делится на 3. Отсюда следует, что $3A$ делится на 9 и S также делится на 9, то есть A делится на 9.

в) Не обязательно, можно взять, например, A=9.

(8-10 класс, средняя). Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

Ответ. Например, 99, 100 и 101.

Решение. Этот пример можно получить, заметив, что $9999 = 99 \cdot 101$.

Замечание. Кроме этого, существует ровно один другой пример: 504, 505, 506.

(9-10 класс, средняя). На доске написано число 543254325432. Некоторые цифры стерли так, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

Ответ. 5435432532.

Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры – либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четверку.

Алгебра

(8 класс, легкая). Найдите наименьший целый корень уравнения $(|x|-1)(x+2,5)=0$.

Ответ. –1.

(8 класс, легкая). Проходят ли прямые $x+y-1=0$, $2x-5y+1=0$ и $4x-3y-1=0$ через одну точку?

Ответ. Да.

Решение. Прямые проходят через точку $\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$.

(8-9 класс, средняя). Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 1000. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 1002.

Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1)=xy+y-x-1$. Произведение увеличилось на 1000, то есть $y-x-1=1000$ или $y-x=1001$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1)=xy-y+x-1$.

Заметим, что $xy-y+x-1=xy-(y-x)-1=xy-1001-1=xy-1002$. То есть произведение уменьшилосьна 1002.

(8 класс, средняя). Докажите, что если $a+2b=3c$ и $b+2c=3a$, то $c+2a=3b$.

Решение. Сложив два данных равенства, получим $a+3b+2c=3c+3a$, откуда $c+2a=3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки получим: $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

(9 класс, средняя). Найдите сумму двух различных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^2+b=b^2+a$.

Ответ. $a+b=1$.

Решение. Решение: уравнение можно преобразовать к виду $(a-b)(a+b-1)=0$. А так как $a\neq b$, то $a+b-1=0$, откуда $a+b=1$.

(9-10 класс, средняя). Найдите все пары чисел x, y, для которых выполнено равенство $\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}=x+y+1$.

Ответ. $x = y = -0,5$.

Решение. В силу неотрицательности подкоренных выражений должны одновременно выполняться неравенства $x \geq y$, $x \leq y$, откуда и следует $x = y = -0,5$.

(9-11 класс, средняя). Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

Ответ. 105.

Решение. Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем 1 + 2 + ... + 9 = 45. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105. Это возможно: (1 + 2 + ... + 9 + 105) : 10 = 15.

(8-9 класс, сложная). В формулу линейной функции $y=kx+b$ вместо букв k и b впишите числа от 11 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось пять функций, графики которых проходят через одну точку.

Решение. Например, графики функций $y=11x+20$, $y=12x+19$, $y=13x+18$, $y=14x+17$, $y=15x+16$, проходят через точку (1; 31).

Геометрия

(8 класс, легкая). Сторона AC треугольника ABC точками D и E разделена на три равные части (точка D лежит между A и E). Докажите, что если $BD=BE$, то треугольник ABC – равнобедренный.

Решение. Так как треугольник BDE равнобедренный, то $\angle BDE=\angle BED$. Значит, равны соответствующие смежные углы: $\angle ADB=\angle CEB$. По условию, $AD=EC$ и $BD=BE$. Поэтому треугольники ADB и CEB равны (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон AB и BC. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный.

(8 класс, средняя). Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OA=OC$, то треугольник ABC – равнобедренный.

Решение. $\Delta AOC_1=\Delta COA_1$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $OC_1=OA_1$ (см. рис. 4) . Поэтому $AA_1=CC_1$, и, следовательно, $\Delta ABA_1=\Delta CBC_1$ (по катету и острому углу). Откуда $AB=BC$.

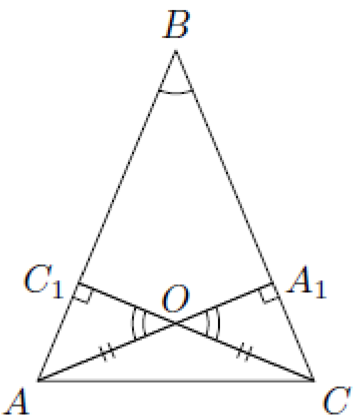


Рис. 4

(8-9 класс, средняя). В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC=120°$, $\angle DAB=60°$.

Ответ. $\angle A=90°$, $\angle B=60°$, $\angle C=30°$.

Решение. Так как $\angle ADC=120°$, то $\angle ADB=60°$. Значит, треугольник ADB равносторонний (и $\angle ABD=60°$). Тогда $BD = AD = DC$ и треугольник ADC равнобедренный. Значит $\angle DAC= \angle DCA=(180°–120°):2=30°$. Откуда $\angle BAC = 90°$.

(9-10 класс, средняя). У звезды $ACEBD$ (см. рис. 5) равны углы при вершинах A и B, углы при вершинах E и C, а также равны длины отрезков AC и BE. Докажите, что $AD=BD$.

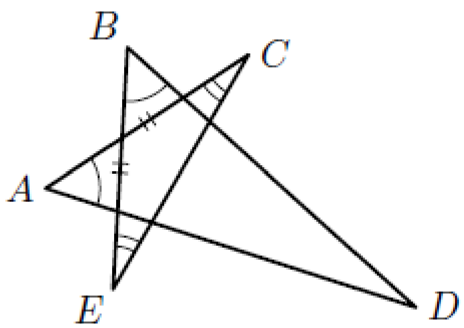


Рис. 5

Решение. Треугольники ACG и BEF равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (см. рис. 6). Следовательно, $\angle AGC=\angle BFE$ и $AG=BF$. По теореме о смежных углах

$\angle FGD=\angle GFD$. Поэтому треугольник GFD равнобедренный ($GD=FD$). Следовательно, $AG+GD=BF+FD$, т.е. $AD=BD$.

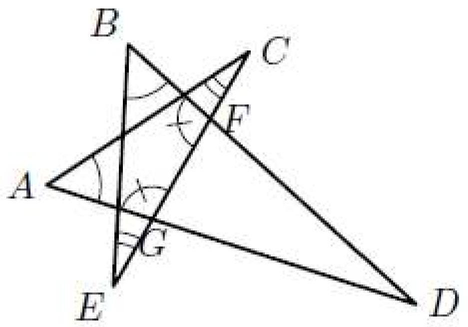


Рис. 6

(9 класс, средняя). В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найдите угол ABC, если $AC = 2AB$.

Ответ. $\angle ABC = 90°$.

Решение. Пусть точка D – середина стороны AC (см. рис. 7). Тогда $AD = AC/2 = AB$. Значит, треугольники ABE и ADE равны (сторона AE – общая, $\angle BAE = \angle CAE$). Тогда $\angle ABC = \angle ADE = 90°$, так как ED – медиана равнобедренного треугольника AEC ($AE=EC$ – по условию) и, значит, его высота.

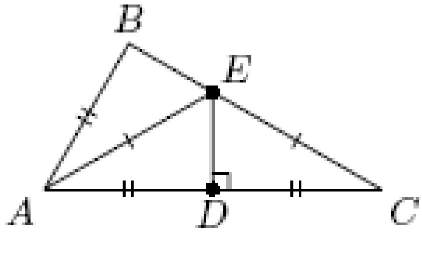


Рис. 7

(10-11 класс, средняя). Параллелограмм двумя парами прямых, параллельных его сторонам, разбит на девять параллелограммов (см. рис. 8). Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь исходного параллелограмма равна S_1, а площадь центрального (закрашенного) параллелограмма равна S_2.

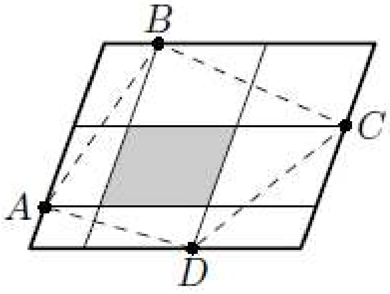


Рис. 8

Ответ. $\frac{S_1 + S_2}{2}$.

Решение. Четырехугольник ABCD складывается из закрашенного параллелограмма и половинок параллелограммов, составляющих рамку.

(10-11 класс, сложная). Точка D – середина стороны AC треугольника ABC, DE и DF – биссектрисы треугольников ADB и CDB. Докажите, что $EF \parallel AC$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$. Отсюда следует, что $EF \parallel AC$.

(10-11 класс, сложная). В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекают описанную окружность в точках K и L. Отрезки AK и BL пересекаются в точке X и делятся этой точкой в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

Решение. Из условия следует подобие треугольников AXB и KXL – по первому признаку ($\angle AXB = \angle KXL$). Отсюда $\angle BAK = \angle LKA$, но $\angle LKA = \angle ABL$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Так как AK и BL – биссектрисы, то отсюда следует $\angle A = \angle B$ (см. рис. 9).

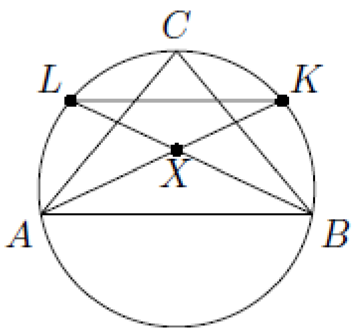


Рис. 9

Комбинаторика

(9-10 класс, сложная). Каких натуральных чисел от 1 до 1000000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13, или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

Ответ. Чисел, делящихся на 11, но не делящихся на 13, среди чисел от 1 до 1000000 больше, чем чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 11.

Решение. Действительно, пусть количества этих чисел равны A и B соответственно, а количество чисел от 1 до 1000000, кратных и 11, и 13, равно C. Тогда $A+C$ – количество чисел, делящихся на 11, а $B+C$ – делящихся на 13. Ясно, что $A+C>B+C$. Поэтому $A>B$.

(10-11 класс, средняя). Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?

Ответ. 72 секунды.

Решение. Если на табло горят цифры $ab.cd.mn$, то $a \neq 7, c \neq 7, m \neq 7$. Поэтому $b=d=n=7$.

Но тогда $a=0$ или 1, $c=0, 1, 2, 3, 4, 5$, $m=0, 1, 2, 3, 4, 5$. Всего получается $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ подходящих наборов цифр, а каждый набор горит 1 секунду.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного этапа всероссийской олимпиады школьников по математике

Журналы

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н., Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.

Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению муниципального этапа

Введение

Настоящие требования к проведению муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников (далее – Олимпиада) по математике разработаны на основе Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников, утвержденного приказом Минобрнауки России от 18 ноября 2013 г. №1252 и изменениями утвержденными приказами Минобрнауки России от 17 марта 2015 г. № 249 и от 17 декабря 2015 г. №1488 (далее – Порядок).

Настоящие методические рекомендации подготовлены центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь региональным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения муниципального этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания муниципального этапа, описание подходов к разработке заданий региональными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения муниципального этапа олимпиады с решениями. В них включены задачи, предлагавшиеся на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны, либо включенные в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019/2020 учебном году утверждены на заседании центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол от 25 июня 2019 г.№ 2).

Основные задачи

На муниципальном этапе происходят изменения в целях Олимпиады. Она теперь направлена не только на популяризацию математики и математических знаний. Анализ ее результатов позволяет сравнивать качество работы с учащимися в различных школах, устанавливать уровень подготовки учащихся всего региона, определять направления работы с одаренными школьниками в регионе. При этом усиливается мотивирующая роль Олимпиады, когда у ее участников появляется возможность сравнения своих математических способностей и олимпиадных достижений не только с учащимися своей школы. Участники получают дополнительные стимулы для регулярных занятий математикой в кружках и на факультативах. Кроме того, муниципальный этап олимпиады является серьезным отборочным соревнованием, поскольку по его итогам из большого числа сильнейших школьников различных муниципальных образований формируется состав участников регионального этапа.

Соответственно меняется и характер заданий олимпиады. Они предполагают знакомство участников со спецификой олимпиадных задач по математике: умение строить цепочки логических рассуждений, доказывать утверждения. Стилистически задания еще в большей, по сравнению со школьным этапом, степени начинают отличаться от заданий повышенной трудности, включаемых в школьные учебники по математике, что предполагает психологическую готовность участников олимпиады к таким заданиям. Наконец, большое количество обладающих математическими способностями участников муниципального этапа олимпиады (в особенности в крупных муниципальных образованиях) предполагает заметно более высокий уровень сложности заданий.

Таким образом, основными целями муниципального этапа олимпиады являются формирование и закрепление интереса математически способных обучающихся к регулярным дополнительным занятиям математикой; повышение качества работы учителей математики в школах и развитие системы работы с одаренными детьми в регионе, отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании, формирование регионального списка наиболее одаренных учащихся.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на муниципальном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Олимпиада проводится для учащихся параллелей 7-11 классов. Рекомендуется проведение муниципального этапа олимпиады и для параллели 6 класса, в особенности в тех регионах, где развита система дополнительного образования (например, проводятся кружки при университетах). Кроме того, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы по отношению к тем, в которых они проходят обучение, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

В муниципальном этапе олимпиады принимают участие участники школьного этапа олимпиады текущего учебного года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призерами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Вышесказанное означает **недопустимость ограничения числа участников Олимпиады от одного образовательного учреждения**.

Рекомендуемая продолжительность олимпиады: для учащихся 6 классов – 3 часа; для учащихся 7-11 классов – 3-4 часа.

Во время Олимпиады участники:

должны соблюдать установленный порядок проведения Олимпиады;

должны следовать указаниям организаторов;

не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории;

не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи иэлектронно-вычислительной техникой.

При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета соответствующего этапа Олимпиады такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Олимпиада должна проходить как абсолютно объективное, беспристрастное и честное соревнование с высоким уровнем качества проверки работ участников и удобными условиями работы для участников. Для достижения этих целей:

а) Работы участников перед проверкой обязательно кодируются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра в формате «класс-номер участника», например, 9-01, 9-02, …). Декодирование работ осуществляется **после** составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призеров олимпиады.

б) Жюри муниципального этапа олимпиады формируется из числа педагогических, научно-педагогических работников, руководящих работников образовательных организаций, аспирантов, ординаторов, ассистентов - стажеров, победителей и призеров международных олимпиад школьников и победителей заключительного этапа всероссийской олимпиады школьников по соответствующим общеобразовательным предметам, а также специалистов в области знаний, соответствующих предмету олимпиады. Работа преподавателя в системе дополнительного образования, в том числе с участниками муниципального этапа, не может быть основанием для отказа от его включения в состав методических комиссий и жюри.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для муниципального этапа

Задания муниципального этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить большинству Участников возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись около 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.
5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.
6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 6 класса рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.
7. Желательно составление заданий олимпиады из **новых** задач, специально подготовленных методической комиссией для олимпиады. В случае, если задания олимпиады подбираются из печатных изданий и Интернет-ресурсов, необходимо, чтобы эти источники были неизвестны участникам Олимпиады. При этом задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Олимпиада должна выявлять не энциклопедичность знаний Участника, а его математические способности.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Перечень средств обучения и воспитания, используемых при проведении муниципального этапа Олимпиады

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуются отдельные листы бумаги формата А4. Для черновиков выдаются отдельные листы. Записи на черновиках не учитываются при проверке выполненных олимпиадных заданий. Черновики сдаются вместе с выполненными заданиями. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Участникам во время проведения олимпиады в аудитории запрещено иметь при себе средства связи, электронно-вычислительную технику, фото-, аудио- и видеоаппаратуру, справочные материалы, письменные заметки и иные средства хранения и передачи информации.

Показ работ и проведение апелляций

Каждый участник олимпиады имеет право ознакомиться с результатами проверки своей работы. Рекомендуемое время проведения показа работ – в течение трех ближайших учебных дней после проведения олимпиады. Перед проведением показа работ жюри должно ознакомить участников олимпиады с решениями задач и критериями оценивания: в устной форме путем проведения разбора вариантов (отдельно для каждого класса), либо путем предоставления участникам решений заданий и критериев оценивания в печатном виде. При проведении показа работ члены жюри дают участнику олимпиады аргументированные пояснения по снижению баллов.

В случае несогласия участника олимпиады с выставленными баллами, он подает апелляцию. Процедура подачи апелляции определяется организатором школьного этапа олимпиады в соответствии с Порядком проведения всероссийской олимпиады школьников. Важно отметить, что баллы в работах могут быть изменены только после рассмотрения апелляции и принятия положительного решения по их изменению. При проведении показа работ баллы могут быть изменены только в случае установления технической ошибки по внесению баллов в протокол. При этом повышение баллов возможно только путем подачи участником олимпиады апелляции.

Тематика заданий муниципального этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах)

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания муниципального этапа олимпиады

Приведенные типовые задания муниципального этапа олимпиады не могут в одинаковой степени устанавливать планку сложности для всех регионов, в силу заметной разницы в уровне развития в различных регионах олимпиадного движения, наличия или отсутствия развитой системы городских математических кружков, наличия в городах сильных математических школ и т.п.. Региональным методическим комиссиям при разработке заданий Олимпиады следует учитывать уровень математического образования в территории. Предлагаемые задания демонстрируют типовую структуру заданий муниципального этапа олимпиады, примерный (усредненный) уровень их сложности, тематику.

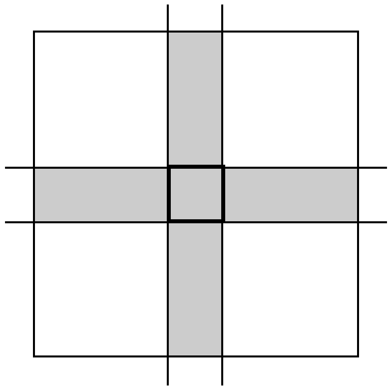
Запрещается использовать для проведения олимпиады приведенный ниже комплект заданий, так как данные методические рекомендации являются открытыми, и участники олимпиады могли ознакомиться с ними.

Условия задач

6 класс

6.1. В числовом примере АБВ+9=ГДЕ буквы А, Б, В, Г, Д и Е обозначают шесть разных цифр. Какая цифра обозначена буквой Д?

6.2. Прямые, параллельные сторонам квадрата, образуют квадратик, центр которого совпадает с центром исходного квадрата. Известно, что площадь креста, образованного квадратиком (см. рис.) в 17 раз больше площади квадратика. А во сколько раз площадь исходного квадрата больше площади квадратика?



6.3. Мальчики принесли в класс конфеты и раздали их девочкам. Петя сказал, что он принёс ровно половину общего числа конфет. Коля сказал, что он принёс ровно треть общего числа конфет, и отдал свои конфеты только Маше и Тане, причём Маше досталось на 3 конфеты больше, чем Тане. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

6.4. Вася выписал на доску 999 произведений: $1\cdot 2$, $2\cdot 3$, $3\cdot 4$, …, $999\cdot 1000$. Верно ли, что сумма каких-то двух из этих произведений равна 20000?

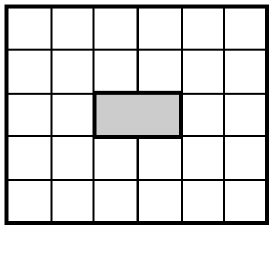
6.5. В комнате 10 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Первый сказал: «В этой комнате по крайней мере 1 лжец». Второй сказал: «В этой комнате по крайней мере 2 лжеца». Третий сказал: «В этой комнате по крайней мере 3 лжеца». И так далее до десятого, который сказал: «В этой комнате все лжецы». Сколько лжецов могло быть среди этих 10 человек?

7 класс

7.1. Расставьте по кругу 6 ненулевых цифр (не обязательно различных) так, чтобы каждая из них равнялась последней цифре суммы своих соседей.

7.2. Петя, Коля и Вася собирали грибы. Петя сказал, что он нашёл на 7 грибов меньше, чем суммарно нашли Коля и Вася, а Коля сказал, что он нашёл на 10 грибов меньше, чем суммарно нашли Петя и Вася. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

7.3. Из клетчатого прямоугольника 6×5 вырезали в центре прямоугольник 2×1, как показано на рисунке. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на 6 треугольников?



7.4. В десятичной записи 13 чисел используется одна и та же цифра N и не используются никакие другие цифры. Может ли сумма этих чисел равняться 8900098?

7.5. По кругу стоят 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Каждый из стоявших сказал: «У меня есть сосед лжец». Найдите минимальное возможное число лжецов среди этих 100 человек.

8 класс

8.1. Четырём девочкам дали конфеты. Маша сказала: «У нас с Катей на 12 конфет больше, чем у Лены с Олей», а Катя сказала: «У нас с Леной на 7 конфет меньше, чем у Маши с Олей». Докажите, что одна из девочек ошиблась.

8.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля – треть, а Вася – пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что Вася не играл ни с Петей, ни с Колей?

8.3. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны соответственно точки D, E и F так, что $BE = BD$ и $AF = AD$. Известно, что ED – биссектриса угла BEF. Докажите, что FD – биссектриса угла AFE.

8.4. Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

8.5. На шахматную доску 8×8 поставили k ладей и k коней так, что ни одна из фигур не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое возможно?

9 класс

9.1. Даны положительные числа p и r. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – линейные функции с корнями p и r. Найдите все корни уравнения $f(x)g(x) = f(0)g(0)$.

9.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля – треть, а Вася – пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что по крайней мере в двух играх не участвовали ни Вася, ни Петя, ни Коля?

9.3. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C – точки касания). Окружность, проходящая через точку B, касается прямой AC в точке A и пересекает отрезок AO в точке M. Докажите, что точка M – середина отрезка AO.

9.4. К числу A, состоящему из восьми ненулевых цифр, прибавили семизначное число, состоящее из одинаковых цифр, и получили восьмизначное число B. Оказалось, что число B может быть получено из числа A перестановкой некоторых цифр. На какую цифру может начинаться число A, если последняя цифра числа B равна 5?

9.5. На клетчатой доске 8×8 размещены 8 клетчатых кораблей размера 1×3 так, что ни у каких двух клеток, занятых разными кораблями, нет общих точек. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить хотя бы один корабль?

10 класс

10.1. Пусть $f(x)=x^2+2ax+b$. Известно, что уравнение $f(x)=0$ имеет два корня. Докажите, что тогда при любом положительном k уравнение $f(x)+k(x+a)^2=0$ также имеет два корня.

10.2. Окружность, проходящая через вершины A, B, D трапеции $ABCD$, пересекает её боковую сторону CD в точке K. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BCK, касается прямой AB.

10.3. На клетчатой доске 8×8 размещён один клетчатый корабль размера 1×3. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

10.4. Верно ли, что любое чётное число, большее 1000, можно представить в виде

$$n(n+1)(n+2)-m(m+1),$$

где m и n – натуральные числа?

10.5. Можно ли выбрать число $n\geq 3$ и так заполнить таблицу $n\times n$ различными натуральными числами от 1 до n^2, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

11 класс

11.1. Известно, что $\sin x \cos y = \cos x \sin y = \frac{1}{2}$. Найдите $\cos 2x - \sin 2y$.

11.2. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x > y > \frac{2}{x-y}$. Докажите, что $x^2 > y^2 + 4$.

11.3. Около основания n-угольной пирамиды можно описать окружность. Известно, что центр этой окружности равноудалён от всех середин боковых рёбер пирамиды. Докажите, что длины всех боковых рёбер пирамиды равны.

11.4. Верно ли, что любое делящееся на 6 число, большее 1000, можно представить в виде

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - m(m+1)(m+2),$$

где m и n – натуральные числа?

11.5. Можно ли выбрать число $n \geq 3$ и так заполнить таблицу $n \times (n+3)$ (n строк и $n+3$ столбца) различными натуральными числами от 1 до $n(n+3)$, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

Решения задач

6 класс

6.1. Ответ. 0.

При сложении вторая цифра первого слагаемого АБВ изменилась (Д вместо Б). Это могло быть только в том случае, когда из разряда единиц при сложении была перенесена 1 в разряд десятков. Но и первая цифра при сложении изменилась (Г вместо А). Значит, из разряда десятков при сложении в разряд сотен тоже перенесена единица. Это возможно только когда Б+1=10. Значит, Б=9, а тогда Д=0.

Замечание. У ребуса есть решения, например, $194 + 9 = 203$.

6.2. Ответ. В 81 раз.

Пусть квадратик имеет размеры 1 см × 1 см, а квадрат – n см × n см. Тогда площадь креста равна $(2n-1)$ см^2 (вертикальный столбик имеет размеры $n\times 1$, горизонтальная строка – $1\times n$, а площадь квадратика мы сосчитали дважды). Из равенства $2n-1=17$ получаем, что $n=9$. Значит, площадь квадрата равна $9\times 9=81$ см^2.

6.3. Предположим, что оба мальчика не ошиблись. Поскольку Петя не ошибся, то общее количество принесённых конфет чётно (в два раза больше количества конфет, принесённых Петей). Треть от чётного числа – тоже чётное число. Значит, количество конфет, которые принёс Коля, чётно. Но, по его словам, он отдал девочкам нечётное количество конфет, так как количества конфет, доставшихся Маше и Тане, имеют разную чётность (различаются на 3), а сумма двух чисел разной чётности нечётна. Получили противоречие.

6.4. **Ответ.** Верно.

Например, $99\cdot 100+100\cdot 101=100(99+101)=100\cdot 200=20000$.

Замечание. Ещё возможны только три примера: $54\cdot 55+130\cdot 131$, $40\cdot 41+135\cdot 136$, $89\cdot 90+109\cdot 110$.

6.5. Ответ. 5.

Пусть в комнате k лжецов. Тогда первые k человек сказали правду (и, следовательно, были рыцарями), а остальные $(10-k)$ соврали (и были лжецами). Значит, $k=10-k$, откуда $k=5$.

7 класс

7.1. Например, $-4-2-8-6-8-2-$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

7.2. Первое решение. Предположим, что никто из ребят не ошибся. Раз Петя нашел на нечётное число 7 меньше грибов, чем Коля и Вася нашли вместе, то количество грибов, собранных Петей, и количество грибов, собранных вместе Колей и Васей – разной чётности. Но тогда общее число собранных грибов нечётно. Аналогично рассуждая, получаем, что количества грибов, собранных Колей, и Петей вместе с Васей – одной чётности. Но тогда общее количество собранных грибов чётно. Противоречие.

Второе решение. Пусть Петя нашел p грибов, Вася – v грибов, а Коля – k грибов. Тогда выполняются равенства $p = k + v - 7$, $k = p + v - 10$. Сложив эти равенства, получим $2v = 17$, что невозможно.

7.3. Ответ. Можно.

Один из примеров разрезания показан на рис. 1.

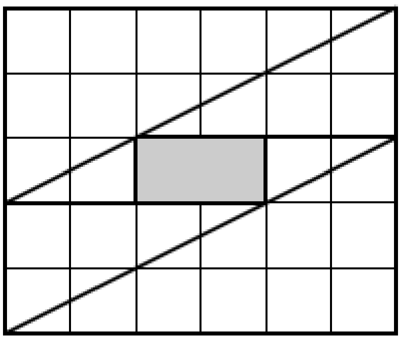


Рис. 1

7.4. Ответ. Не может.

Предположим, что сумма могла равняться 8900098. У каждого из слагаемых одна и та же последняя цифра N. Значит, последняя цифра суммы равна последней цифре числа $13N$. Отсюда следует, что $N = 6$. Но тогда каждое из слагаемых делится на 6, то есть делится на 3. Следовательно, и сумма всех чисел делится на 3. Но по признаку делимости на 3 число 8900098 на 3 не делится. Противоречие.

7.5. Ответ. 34.

Заметим, что три рыцаря не могут стоять рядом, так в этом случае средний рыцарь солгал бы. Значит, среди любых трёх стоящих подряд человек есть лжец. Возьмем какого-нибудь лжеца, а остальных 99 человек разобьем на 33 тройки стоящих рядом людей.Так как в каждой тройке есть хотя бы один лжец, общее число лжецов в круге не меньше $1 + 33 = 34$.

Ровно 34 лжеца могут стоять, например, так: –Л(РЛР)(РЛР)…(РЛР)–.

8 класс

8.1. Первое решение. Предположим, что ни одна из девочек не ошиблась. Тогда общее количество конфет у Маши с Катей такой же чётности, как общее количество конфет у Лены с Олей (они различаются на чётное число 12). Значит, общее количество конфет у всех четырёх девочек чётно. Аналогично рассуждая, получаем, что общее количество конфет у Кати с Леной противоположной чётности общему количеству конфет у Маши с Олей (они различаются на нечётное число 7). Значит, общее количество конфет у всех четырёх девочек нечётно. Противоречие.

Второе решение. Обозначим через c_M, c_K, c_L и c_O количества конфет у Маши, Кати, Лены и Оли, соответственно. Тогда из условия известно, что, если бы ни одна из девочек не ошиблась, то

$$c_M + c_K = c_L + c_O + 12, c_K + c_L = c_M + c_O - 7.$$

Сложив оба равенства, получим $2c_K - 2c_O - 5 = 0$. Заметив, что $2c_K$ и $2c_O$ чётны, а 5 нечётно, получаем противоречие.

8.2. Ответ. 30.

Из условия следует, что половина, треть и пятая часть от общего количества проведённых игр – целые числа. Поскольку наименьшее общее кратное знаменателей – чисел 2, 3, 5 – равно 30, то общее количество проведённых игр тоже кратно 30. Пусть оно равно $30p$. Тогда Петя сыграл $15p$, Коля – $10p$, Вася – $6p$ игр.

Пусть y – количество игр, сыгранных между собой Петей и Колей (это число равно 0 или 1), а z – количество игр, сыгранных без участия Пети, Коли и Васи. Тогда $15p + 10p + 6p - y + z = 30p$, то есть $p = y - z$. Единственное возможное положительное значение p равно 1, и оно достигается, когда $y = 1$, $z = 0$.

Замечание. Условие непротиворечиво: такая ситуация действительно могла иметь место (то есть можно провести 30 игр в соответствии с условием).

8.3. Из равенства сторон BE и BD треугольника DBE следует, что $\angle BDE = \angle BED$ (см. рис. 2). Но, по условию, $\angle FED = \angle BED$. Значит, $\angle FED = \angle BDE$. Это означает, что прямые BA и EF параллельны. Но тогда $\angle EFD = \angle ADF$. Кроме того, из равенства $AF = AD$ следует, что $\angle ADF = \angle AFD$. Значит, FD – биссектриса угла AFE. Утверждение доказано.

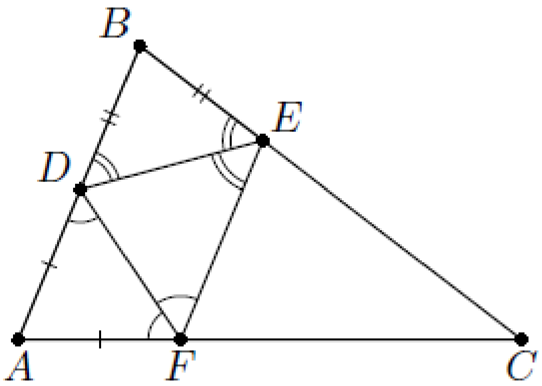


Рис. 2

8.4. Ответ. Не могла.

Предположим, что сумма произведений могла равняться 1001. Сумма двух чисел (в данном случае – этих произведений) бывает нечётной только когда одно из них чётно, а другое – нечётно. Значит, одно из произведений чётно, а другое – нечётно.

Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение нечётно, то оба числа должны быть нечётными, при этом одно из них должно давать остаток 1 при делении на 4, а другое – остаток 3 при делении на 4. Тогда остаток от деления на 4 их произведения равен $1 \cdot 3 = 3$.

Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение чётно, то оба числа должны быть чётными. Тогда их произведение даёт остаток 0 при делении на 4.

Таким образом, сумма двух произведений будет давать остаток 3 при делении на 4. Получили противоречие, так как 1001 даёт остаток 1 при делении на 4.

8.5. Ответ. 5.

Из условия следует, что в одной строке (столбце) с ладьёй не может стоять никакая другая фигура.

Предположим, что на доску поставили 6 ладей. Тогда они стоят в 6 строках и 6 столбцах. Поэтому непобитых клеток останется всего 4 (стоящих на пересечении двух пустых строк и двух пустых столбцов). В эти клетки нельзя поставить 6 коней. Поэтому k не больше 5.

На рис. 3 показано, как поставить на доску 5 ладей и 5 коней так, чтобы они не били друг друга.

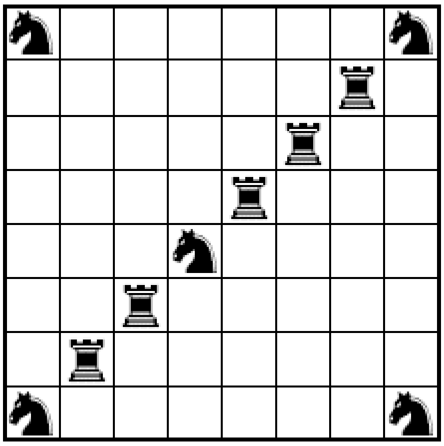


Рис. 3

Замечание. Существуют и другие примеры расстановки.

9 класс

9.1. Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = p + r$.

Первое решение. Пусть данные функции имеют вид: $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$. Тогда уравнение принимает вид $(ax+b)(cx+d) - bd = 0$, то есть $x(acx + ad + bc) = 0$. Один корень этого уравнения $x_1 = 0$, а второй $x_2 = \frac{-ad - bc}{ac}$, то есть $x_2 = -\frac{d}{c} - \frac{b}{a}$. Осталось заметить, что $-\frac{d}{c}$ есть r, а $-\frac{b}{a}$ – это p.

Второе решение. Запишем наши функции в виде: $f(x) = a(x - p)$, $g(x) = c(x - r)$. Тогда уравнение принимает вид $ac(x-p)(x-r) - acpr = 0,$ то есть $acx(x - p - r) = 0$, откуда и следует ответ.

9.2. Ответ. 30.

Из условия следует, что половина, треть и пятая часть от общего количества проведённых игр – целые числа. Поскольку наименьшее общее кратное знаменателей – чисел 2, 3, 5 – равно 30, то общее количество проведённых игр тоже кратно 30. Пусть оно равно $30p$. Тогда Петя сыграл $15p$, Коля – $10p$, Вася – $6p$ игр. Пусть y – количество игр, сыгранных между собой Петей, Колей и Васей (это число равно 0, 1, 2 или 3), а z – количество игр, сыгранных без участия Пети, Коли и Васи ($z \ge 2$). Тогда $15p + 10p + 6p - y + z = 30p$, то есть $p = y - z$. Единственное возможное положительное значение p равно 1, и оно достигается, когда $y = 3, z = 2$.

Замечание. Условие непротиворечиво: такая ситуация действительно могла иметь место (то есть можно провести 30 игр в соответствии с условием).

9.3. Угол *OAC,* образованный касательной и хордой, равен вписанному углу *ABM* (рис. 4). Поскольку *AO* – биссектриса угла *BAC*, то $\angle ABM = \angle BAM$. Но радиус *OB* перпендикулярен касательной *AB* и, стало быть, треугольник *ABO* – прямоугольный, а в прямоугольном треугольнике только для медианы выполняется равенство $\angle ABM = \angle BAM$. Утверждение доказано.

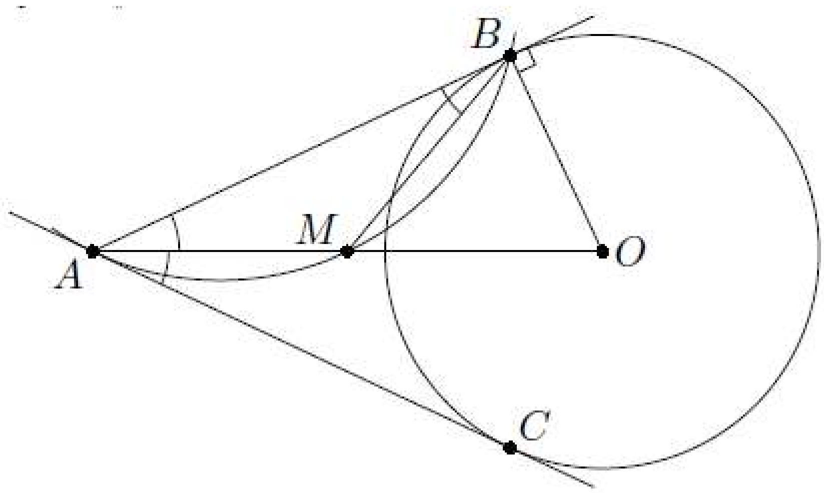


Рис. 4

9.4. Ответ. 5.

Так как числа A и B имеют одинаковую сумму цифр, то их разность делится на 9. Поэтому прибавленное семизначное число из одинаковых цифр делится на 9. Значит, оно состоит из девяток. То есть можно считать, что к числу A прибавили 10^7 и вычли 1. Это значит, что число B получается из числа A увеличением первой цифры на 1 и уменьшением последней цифры на 1 (так как в A нет нулей, а B восьмизначно), а остальные цифры не меняются. Так как число B может быть получено из числа A перестановкой некоторых цифр, то последняя цифра числа B совпадает с первой цифрой числа A (и наоборот). Поэтому число A может начинаться только на цифру 5.

9.5. Ответ. Хватит двух выстрелов.

Сделаем 2 выстрела так, как показано на рис. 5. Предположим, что мы не ранили ни один корабль. Тогда в области 1 кораблей нет. В каждой из областей 2 и 3 стоит не более 1 корабля. Значит, в области 4 стоит по крайней мере 6 кораблей.

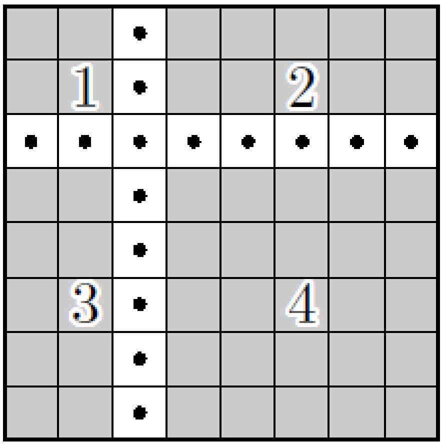


Рис. 5

Область 4 является квадратом 5×5. Тогда в этой области корабли, расположенные горизонтально, не могут лежать в соседних строках, а корабли, расположенные вертикально, не могут располагаться в соседних столбцах. Поэтому в этой области находится 3 «вертикальных» и 3 «горизонтальных» корабля, причем один из них лежит в центральной строке, а другой – в центральном столбце области. Но тогда оба этих корабля содержат центральную клетку области. Противоречие. Значит, по крайней мере один корабль ранен.

Покажем, что если сделан только один выстрел, то можно не ранить ни один корабль. Пусть выстрел был сделан в какую-то строку. Заметим, что в одной строке можно разместить два корабля. Тогда если выстрел сделан в строку с нечётным номером, по два корабля могли стоять в строках с номерами 2, 4, 6 и 8. Если же выстрел сделан в строку с чётным номером, по два корабля могли стоять в строках с номерами 1, 3, 5 и 7.

Замечание. Можно показать, что в области 4 нельзя расставить даже 5 кораблей.

10 класс

10.1. Первое решение. По условию $a^2-b>0$. Пусть $F(x)=f(x)+k(x+a)^2$. Вычислим дискриминант нового трёхчлена $F(x)$. Имеем:

$$F(x)=x^2+2ax+b+k(x+a)^2=(k+1)x^2+2a(k+1)x+(b+ka^2).$$

Значит,

$$\frac{1}{4}D_1 = a^2(k+1)^2 - (k+1)(b+ka^2) = (k+1)(a^2-b),$$

что доказывает утверждение задачи, поскольку $k+1>0$.

Второе решение. Перепишем исходный трёхчлен в виде $(x+a)^2+(b-a^2)$. Его значение в вершине равно $b-a^2<0$. Новый трёхчлен есть

$$F(x) = (k+1)(x+a)^2 + (b-a^2),$$

причём его старший коэффициент положителен. Так как трёхчлен F в точке $x=-a$ принимает отрицательное значение $b-a^2$, то он имеет два корня.

10.2. Пусть P – точка, лежащая на продолжении отрезка AB за точку B (рис. 6). Тогда утверждение задачи равносильно тому, что угол PBC равен вписанному углу CKB. Но углы CKB и DKB являются смежными, поэтому $\angle CKB = 180^\circ - \angle DKB$. С другой стороны, четырехугольник $DKBA$ – вписанный, поэтому $\angle DKB = 180^\circ - \angle DAB$. Наконец, из параллельности сторон AD и BC трапеции следует, что $\angle CBP = \angle DAB$. Утверждение доказано.

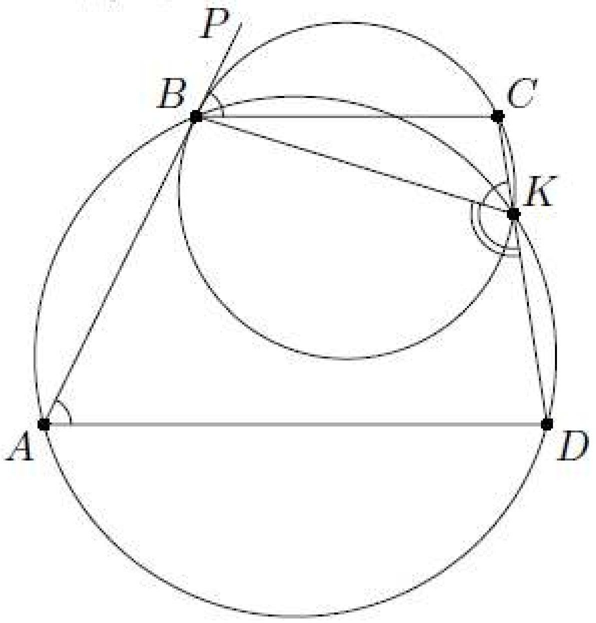


Рис. 6

10.3. Ответ. Хватит четырёх выстрелов.

Сделаем 4 выстрела так, как показано на рис. 7. Тогда видно, что корабль гарантированно будет ранен. Покажем, что если сделано только 3 выстрела, то можно не ранить корабль. Пусть, например, вдоль строки сделано не более одного выстрела.

Тогда в любом столбце, в который не сделано выстрела, прострелено не более одной клетки, и поэтому в этом столбце может стоять корабль, который не будет ранен.

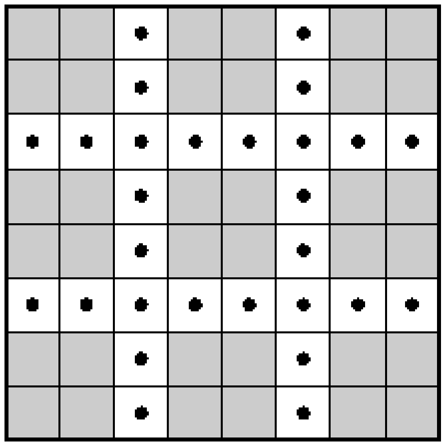


Рис. 7

10.4. Ответ. Неверно.

Заметим, что произведение трёх последовательных натуральных чисел $n(n+1)(n+2)$ делится на 3. Разберём несколько случаев.

Если m имеет остаток 0 или 2 при делении на 3, то $m(m+1)$ делится на 3. Значит, число $n(n+1)(n+2)-m(m+1)$ делится на 3.

Если m имеет остаток 1 при делении на 3, то $m(m+1)$ имеет остаток 2 при делении на 3. Значит, число $n(n+1)(n+2)-m(m+1)$ имеет остаток 1 при делении на 3.

Это означает, что число $n(n+1)(n+2)-m(m+1)$ не может иметь остаток 2 при делении на 3. То есть, например, число 1004 в требуемом виде представить не удастся.

10.5. Ответ. Нельзя.

Предположим, что таблицу удалось заполнить требуемым образом. Рассмотрим в каждой строке три числа: два множителя и их произведение. Отметим в каждой строке наименьший множитель. Так как строк n, то всего наименьших множителей n. А так как они различны, то среди них найдётся такой, который не меньше n. Но тогда в строке, где находится этот множитель, второй множитель будет не меньше $n+1$. Поэтому их произведение не меньше $n(n+1) > n^2$. Противоречие.

11 класс

11.1. Ответ. -1 или 1.

Первое решение. Перемножив данные равенства и умножив произведение на 4, получаем $\sin 2x \sin 2y = 1$. Отсюда $\sin 2x = \sin 2y = 1$ или $\sin 2x = \sin 2y = -1$ (оба случая возможны; достаточно взять $x = y = \frac{\pi}{4}$ или $x = \frac{3\pi}{4}$, $y = -\frac{\pi}{4}$). В обоих случаях $\cos 2x = 0$. Тогда $\cos 2x - \sin 2y = -1$ или $\cos 2x - \sin 2y = 1$.

Второе решение. Из условия имеем $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = 1$ и, аналогично, $\sin(x-y) = 0$. Тогда $x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x - y = \pi\ell$ при целых k и ℓ. Но тогда $2x = (x+y)+(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi(2k+\ell)$, откуда $\cos 2x = 0$, а $2y = (x+y)-(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi(2k-\ell)$, откуда $\sin 2y = \pm 1$. Значит, $\cos 2x - \sin 2y = \mp 1$. Те же примеры показывают, что оба ответа возможны.

11.2. Сложив неравенства $x > \frac{2}{x-y}$ и $y > \frac{2}{x-y}$, получаем, что $x + y > \frac{4}{x-y}$.

Из условия $x > y$ следует, что знаменатель дробей положителен, поэтому на него можно умножить без изменения знака неравенства. Тогда получаем: $(x+y)(x-y) > 4$, то есть $x^2 - y^2 > 4$. Утверждение доказано.

Замечание. Число 4 нельзя заменить на большее, поскольку при $0 < \varepsilon < 1$, $x = \frac{2}{\varepsilon} + 2\varepsilon$ и $y = \frac{2}{\varepsilon} + \varepsilon$ имеем

$$x > y = \frac{2}{\varepsilon} + \varepsilon > \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2}{x-y},$$

но при этом

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = \varepsilon\left(\frac{4}{\varepsilon} + 3\varepsilon\right) = 4 + 3\varepsilon^2,$$

что может быть сколь угодно близким к 4 при достаточно малых ε.

11.3. Пусть O – центр окружности, описанной около основания $A_1A_2\ldots A_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$, точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ – соответственно середины боковых рёбер $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$

пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ (см. рис. 8). Как известно, все точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ лежат в одной плоскости (эта плоскость параллельна основанию и равноудалена от основания и вершины пирамиды). Обозначим её через α.

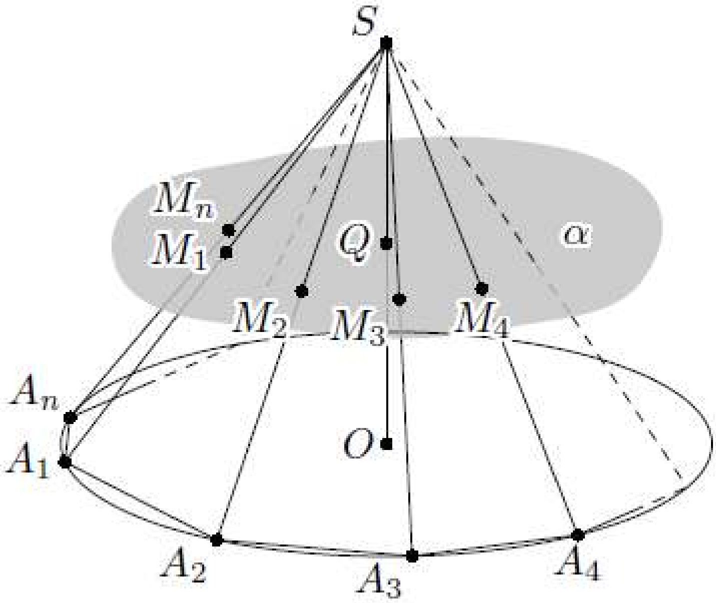


Рис. 8

Пусть Q – точка пересечения луча SO с плоскостью α. Тогда QM_k, $k=1,\ldots,n$ – средние линии треугольников SOA_k, и потому при всех $k=1,\ldots,n$ имеем: $QM_k = \dfrac{R}{2}$, где R – радиус окружности, описанной около основания пирамиды. Значит, Q – точка, равноудалённая от вершин многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$, то есть является центром окружности, описанной около многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$. Пусть OH – перпендикуляр, проведённый из точки O к плоскости α. Тогда из равенства прямоугольных треугольников OHM_k, $k=1,\ldots,n$ (они равны, поскольку катет OH у них общий, а гипотенузы OM_k равны по условию), следует, что и точка H – центр описанной окружности многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$. Значит, точки Q и H совпадают. Это означает, что SO – высота пирамиды. Но тогда из равенства прямоугольных треугольников SOA_k, $k=1,\ldots,n$, следует равенство боковых сторон пирамиды.

11.4. Ответ. Неверно.

Заметим, что произведение пяти последовательных натуральных чисел $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 5. Разберём несколько случаев.

Если m имеет остаток 0, 3 или 4 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ делится на 5.

Если m имеет остаток 1 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ имеет остаток 1 при делении на 5.

Если m имеет остаток 2 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ имеет остаток 4 при делении на 5.

Значит, число $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-m(m+1)(m+2)$ может иметь при делении на 5 только остатки 0, 1, 4. То есть, например, число 1002 в требуемом виде представить не удастся.

11.5. Ответ. Нельзя.

Предположим, что таблицу удалось заполнить требуемым образом. Рассмотрим в каждой строке три числа: два множителя и их произведение. Отметим в каждой строке наименьший множитель. Заметим, что множитель не может равняться 1, так как в этом случае в строке оказались бы одинаковые числа. Так как строк n, то всего наименьших множителей n. А так как они различны, то среди них найдётся такой, который не меньше $n+1$. Но тогда в строке, где находится этот множитель, второй множитель будет не меньше $n+2$. Поэтому их произведение не меньше

$$(n+1)(n+2)=n^2+3n+2>n^2+3n=n(n+3).$$

Противоречие.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математие

Журналы:

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В.,Кукина Е.Г.,Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н. ,Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2013.

Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.

Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/